

Chapitre 28

Dimension d'un espace vectoriel

Plan du chapitre

1	Préliminaires	1
1.1	Propriétés des familles libres et génératrices	1
1.2	Cardinal d'une famille.	2
1.3	Théorème de la dimension pour les e.v.	3
1.4	Théorèmes de la base incomplète, de la base extraite	4
2	Dimension d'un e.v.	5
2.1	Définition et exemples	5
2.2	Exemple important : dimension et base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	7
2.3	Dimension de $E \times F$	7
2.4	Cardinal d'une famille libre / génératrice et dimension de l'espace	8
2.5	Complétion ou extraction d'une famille pour obtenir une base	9
3	Dimension et s.e.v.	10
3.1	Dimension d'un s.e.v.	10
3.2	Base adaptée à une décomposition	11
3.3	Dimension et somme de s.e.v.	13
3.4	Dimension et s.e.v. supplémentaires	14
4	Compléments : dimension infinie	15
5	Méthodes pour les exercices.	16

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
 E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1 Préliminaires

1.1 Propriétés des familles libres et génératrices

Définition 28.1

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E . On dit que :

- $\mathcal{G}$ est une sur-famille de $\mathcal{F}$ si on obtient $\mathcal{G}$ à partir de $\mathcal{F}$ en lui ajoutant zéro, un ou plusieurs vecteurs.
- $\mathcal{E}$ est une sous-famille de $\mathcal{F}$ si on obtient $\mathcal{E}$ à partir de $\mathcal{F}$ en lui retirant zéro, un ou plusieurs vecteurs.

Exemple 1. Soit $\mathcal{F} = (1, i)$ une famille de complexes.

- $\mathcal{F}$ possède comme sous-familles $(1, i)$, (1) , (i) et la famille vide $()$.
- $\mathcal{F}$ possède une infinité de sur-familles : $(1, i, 0)$, $(1, i, 1, 1)$, $(1, i)$, etc.

Théorème 28.2

1. Toute sur-famille d'une famille *génératrice* est encore génératrice.
2. Toute sur-famille d'une famille *liée* est encore liée.
3. Toute sous-famille d'une famille *libre* est encore libre.

Démonstration. On ne montre que les assertions 1 et 3, dans le cas où on ajoute ou enlève un seul vecteur.

- Montrons la première assertion.

- Montrons la troisième assertion.

□

Exemple 2. $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$, donc une famille libre et génératrice.

- $(1, X)$ est une sous-famille de $(1, X, X^2)$ et est donc libre (mais pas génératrice).
- $(1, X, X^2, 3X)$ est une sur-famille de $(1, X, X^2)$ et est donc génératrice (mais pas libre).

1.2 Cardinal d'une famille

On rappelle qu'une famille $(a_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un ensemble E correspond en fait à une application

$$\begin{aligned} a : I &\rightarrow E \\ i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

Par exemple, une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de réels indexé par $\mathbb{N}$ et correspond donc à une application $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 28.3 – Cardinal d'une famille

Soit $\mathcal{F} = (a_i)_{i \in I}$ une famille indexée par un ensemble I .

- Si I est **fini**, on dit que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est finie. De plus, on appelle cardinal (ou taille) de la famille le nombre d'éléments de I , et on note ce nombre

$$\text{card}(\mathcal{F}) \quad \text{ou encore} \quad \text{card}((a_i)_{i \in I})$$

- Si I est **infini**, on dit que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est infinie.

Attention : le cardinal de $(a_i)_{i \in I}$ ne dépend pas des valeurs prises par les éléments a_i . Même s'ils sont tous égaux, chacun compte pour un élément de plus pour le cardinal.

Exemple 3. ◦ Le cardinal de la famille de polynômes $(1, X, X, X)$ est 4.

- Le cardinal de $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ est
- Toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille infinie.
- La famille $(x \mapsto x^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}}$ est infinie.
- Si $\mathcal{F}$ est une famille finie et si $\mathcal{F}'$ est une sous-famille de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}'$ est finie et on a $\text{card}(\mathcal{F}') \leq \text{card}(\mathcal{F})$.

1.3 Théorème de la dimension pour les e.v.
Lemme 28.4

Soit $u_1, \dots, u_n, v \in E$.

$$\forall \lambda_0 \in \mathbb{K}^* \quad \text{Vect}(v, u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}(\lambda_0 v, u_1, \dots, u_n)$$

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \quad \text{Vect}(v, u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}\left(v + \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i, u_1, \dots, u_n\right)$$

Autrement dit, un ensemble mis sous la forme d'un Vect reste inchangé lorsqu'on multiplie un des vecteurs "dans le Vect" par un scalaire non nul, ou lorsqu'on ajoute à un de ces vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Démonstration. On ne montre que la deuxième égalité. Soit $w \in E$.

$$\begin{aligned} w &\in \text{Vect}\left(v + \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i, u_1, \dots, u_n\right) \\ \iff \exists \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \quad w &= \alpha_0 \left(v + \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\right) + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \\ \iff \exists \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \quad w &= \alpha_0 v + (\alpha_0 \lambda_1 + \alpha_1) u_1 + \dots + (\alpha_0 \lambda_n + \alpha_n) u_n \\ \iff \exists \beta_0, \dots, \beta_n \in \mathbb{K} \quad w &= \beta_0 v + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n \quad (\text{cf plus bas pour la justification}) \\ \iff w &\in \text{Vect}(v, u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Le sens direct de l'avant-dernière équivalence est évident. Pour le sens réciproque, on peut poser $\alpha_0 = \beta_0$, puis $\alpha_1 = \beta_1 - \alpha_0 \lambda_1 = \beta_1 - \beta_0 \lambda_1$, etc. $\square$

Théorème 28.5

Soit $\mathcal{L}$ une famille libre finie de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E . On a :

$$\text{card}(\mathcal{L}) \leq \text{card}(\mathcal{G})$$

Autrement dit, le cardinal de toute famille libre est plus petit que le cardinal de toute famille génératrice.

Démonstration.

Supposons par l'absurde qu'il existe une famille génératrice $\mathcal{G}$ et une famille libre $\mathcal{L}$ avec $\text{card}(\mathcal{L}) > \text{card}(\mathcal{G})$. On pose : $n = \text{card}(\mathcal{G}) \in \mathbb{N}^*$, et on extrait de $\mathcal{L}$ une famille $\mathcal{L}'$ qui possède $n + 1$ vecteurs. Cette famille $\mathcal{L}'$ est encore libre par le Théorème 28.2. On pose ensuite :

$$\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n) \quad \mathcal{L}' = (\ell_1, \dots, \ell_{n+1})$$

Comme $\mathcal{G}$ est génératrice, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\ell_1 = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n$$

Si tous les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ étaient nuls, on aurait $\ell_1 = 0_E$, ce qui contredirait le fait que $\mathcal{L}'$ soit libre. Donc $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$, et quitte à changer l'ordre des vecteurs de $\mathcal{G}$, on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$. Alors

$$g_1 = \frac{1}{\alpha_1} \ell_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} g_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} g_n$$

Ainsi, grâce au Lemme 28.4, on en déduit que

$$\begin{aligned} E &= \text{Vect}(g_1, g_2, \dots, g_n) \\ &= \text{Vect}\left(\frac{1}{\alpha_1} \ell_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} g_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} g_n, g_2, \dots, g_n\right) \\ &= \text{Vect}\left(\frac{1}{\alpha_1} \ell_1, g_2, \dots, g_n\right) \\ &= \text{Vect}(\ell_1, g_2, \dots, g_n) \end{aligned}$$

Procédons par récurrence pour montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$E = \text{Vect}(\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, \dots, g_n)$$

Cette assertion est vraie pour $k = 1$ par ce qui précède. Supposons que cette assertion soit vraie pour un $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, et montrons qu'elle l'est encore au rang $k + 1$. Par hypothèse de récurrence, la famille $\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, \dots, g_n$ est génératrice, donc il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\ell_{k+1} = \alpha_1 \ell_1 + \dots + \alpha_k \ell_k + \alpha_{k+1} g_{k+1} + \dots + \alpha_n g_n$$

Si on avait $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$, on aurait

$$\ell_{k+1} = \alpha_1 \ell_1 + \dots + \alpha_k \ell_k$$

et donc ℓ_{k+1} serait une combinaison linéaire de $\ell_1, \dots, \ell_k$, d'où $\mathcal{L}'$ serait liée, ce qui est impossible par hypothèse. Donc $(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ et quitte à changer l'ordre de $\mathcal{G}$, on peut supposer $\alpha_{k+1} \neq 0$. Alors,

$$\begin{aligned} g_{k+1} &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}} \ell_1 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \ell_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}} \ell_{k+1} \\ &\quad - \frac{\alpha_{k+2}}{\alpha_{k+1}} g_{k+2} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_{k+1}} g_n \end{aligned}$$

On trouve donc que g_{k+1} est une combinaison linéaire de $\ell_1, \dots, \ell_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_n$. Avec un argument similaire à ce qui précède, on a donc

$$\begin{aligned} E &= \text{Vect}(\ell_1, \dots, \ell_k, g_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_n) \\ &= \text{Vect}(\ell_1, \dots, \ell_k, \ell_{k+1}, g_{k+2}, \dots, g_n) \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vérifiée pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En particulier, pour $k = n$, on obtient

$$E = \text{Vect}(\ell_1, \dots, \ell_n)$$

Comme ℓ_{n+1} est un vecteur de E , on en déduit que $\ell_{n+1} \in \text{Vect}(\ell_1, \dots, \ell_n)$, donc que la famille $\mathcal{L}' = (\ell_1, \dots, \ell_{n+1})$ est liée. Contradiction. D'où le résultat. $\square$

1.4 Théorèmes de la base incomplète, de la base extraite

Les deux théorèmes suivants sont admis : leur preuve est faisable si E est de dimension finie, mais en dimension infinie, cela nécessite l'axiome du choix.

Théorème 28.6 – Théorème de la base extraite (admis)

De toute famille génératrice de E , on peut “extraire” une sous-famille qui est une base de E .

En d'autres termes, si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E , on peut obtenir une base de E en enlevant à la famille $\mathcal{G}$ un certain nombre de vecteurs (zéro, un ou plusieurs).



Le théorème ci-dessus ne nous dit pas quels vecteurs enlever... Si on enlève trop de vecteurs, ou si on choisit mal les vecteurs enlevés, on n'obtiendra pas une base.

Exemple 4. La famille $\mathcal{G} = ((1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 2))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$ car ce n'est pas une famille libre.

- La sous-famille $((1, 0), (0, 1))$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$. De même que $((1, 0), (1, 1))$, etc.
- La sous-famille $((1, 0))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.
- Par contre, la sous-famille $((1, 1), (2, 2))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$ car elle est liée.

Exemple 5. Si $\mathcal{B}$ est une base de E , alors $\mathcal{B}$ est en particulier une famille génératrice et on peut en extraire une base en lui enlevant ... zéro vecteur !

Théorème 28.7 – Théorème de la base incomplète (admis)

Toute famille libre de E peut être “complétée” en une sur-famille qui est une base de E .

En d'autres termes, si $\mathcal{L}$ est une famille libre, on peut obtenir une base de E en ajoutant à $\mathcal{L}$ un certain nombre de vecteurs de E (zéro, un ou plusieurs).

Exemple 6. La famille $\mathcal{L} = ((1, -1, 0))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ car ce n'est pas une famille génératrice.

- La sur-famille $((1, -1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- La sur-famille $((1, -1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ car elle est liée.

Exemple 7. Si $\mathcal{B}$ est une base de E , c'est en particulier une famille libre et on peut compléter $\mathcal{B}$ en une base en lui ajoutant ... zéro vecteur !

Corollaire 28.8

Tout e.v. possède des bases.

Démonstration. Cela résulte du théorème de la base incomplète : il suffit de prendre une famille libre quelconque de l'e.v. (par exemple une famille contenant un seul vecteur non nul) et de la compléter en une base. Cette preuve ne marche pas lorsque l'e.v. est $\{0_E\}$, mais ce cas est réglé par une convention (cf Exemple 11) □

2 Dimension d'un e.v.

2.1 Définition et exemples

Définition 28.9 – Dimension finie

E est dit de dimension finie si E possède une famille génératrice finie.

Sinon, on dit que E est de dimension infinie.

Dit autrement, E est de dimension finie s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que $E = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Attention, plusieurs valeurs de n sont possibles : par exemple si $E = \text{Vect}(x_1, \dots, x_4)$ avec 4 vecteurs, on peut aussi écrire

$$E = \text{Vect}(\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_4}_{6 \text{ vecteurs}}, 0_E, 0_E)$$

Théorème 28.10

Si E est un e.v. de dimension finie, toutes ses bases sont des familles finies et ont le même cardinal : cet entier (positif) est appelé la dimension de E , notée $\dim E$.

Remarque. On a le droit d'écrire " $\dim E$ " uniquement si E est de dimension finie. Aucune formule où apparaît " $\dim E$ " (ou " $\dim F$ " ou " $\dim G$ ") n'est valable si un de ces espaces est de dimension infinie.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Montrons que $\mathcal{B}$ est finie. Comme E est de dimension finie, il possède une famille génératrice finie $\mathcal{G}$: on note n son cardinal. Supposons par l'absurde que $\mathcal{B}$ est infinie. On peut alors en extraire une sous-famille $\mathcal{L}$ de $n + 1$ éléments, qui sera encore libre car $\mathcal{B}$ l'est. Or, on a $\text{card}(\mathcal{L}) > \text{card}(\mathcal{G})$, ce qui est une contradiction (par le Théorème 28.5). Ainsi, toute base de E est finie.

□

Exemple 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'e.v. $\mathbb{K}^n$ admet pour base (canonique)

$$\mathcal{B} = \left((1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), (0, 0, \dots, 0, 1) \right)$$

Ainsi, $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie et $\dim \mathbb{K}^n = n$.

Exemple 9. $\mathbb{K}_n[X]$ admet pour base (canonique) $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$, donc $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie et

$$\dim \mathbb{K}_n[X] =$$

Remarque. Un ensemble E peut être en même temps un $\mathbb{C}$ -e.v. et un $\mathbb{R}$ -e.v. et admettre des dimensions différentes dans chacun des cas. La dimension de E vu comme un $\mathbb{C}$ -e.v. est en général notée $\dim_{\mathbb{C}} E$ tandis que la dimension de E vu comme un $\mathbb{R}$ -e.v. est en général notée $\dim_{\mathbb{R}} E$.

Exemple 10. On sait que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$ -e.v. mais $\mathbb{C}$ est aussi un $\mathbb{R}$ -e.v.

- Si $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{C}$ -e.v. alors $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ et toute famille (z) avec $z \in \mathbb{C}^*$ est une base de $\mathbb{C}$.
- Si $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{R}$ -e.v. alors $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$: en effet, tout complexe z s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = a \times 1 + b \times i \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Exemple 11. Par convention, la famille vide $(\)$ est libre et comme $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$, elle constitue une base de $\{0_E\}$. Ainsi, $\{0_E\}$ est de dimension finie et $\dim\{0_E\} = 0$. C'est le seul s.e.v. de E à être de dimension nulle.

Exemple 12. Pour tout $u \in E$, le s.e.v. $\mathbb{K}u := \text{Vect}(u)$ est de dimension finie et $\dim(\mathbb{K}u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \neq 0_E \\ 0 & \text{si } u = 0_E \end{cases}$.
Plus généralement, un e.v. de dimension 1 est appelé une droite vectorielle (il peut s'écrire $\mathbb{K}u$ avec $u \neq 0_E$).

Exemple 13. Pour tous vecteurs u et v de E **non colinéaires**, le s.e.v. $\text{Vect}(u, v)$ est de dimension 2.
Un e.v. de dimension 2 est appelé un plan vectoriel.

2.2 Exemple important : dimension et base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. On note $E^{ij} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice élémentaire, définie par : $\forall (k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \quad [E^{ij}]_{k\ell} = \delta_{ik} \delta_{j\ell}$.

Remarque. Toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut s'écrire (de manière unique) comme une combinaison linéaire des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} E^{ij}$$

Théorème 28.11

Dans l'e.v. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille des matrices élémentaires $(E^{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ forme une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

En particulier, $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) =$ et $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) =$.

Démonstration. Par la Remarque ci-dessus, la famille (E^{ij}) est trivialement génératrice. Montrons qu'elle est libre. Soit $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une famille de scalaires.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_{i,j} E^{ij} = 0_{n,p} &\implies \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \cdots & \lambda_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \cdots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} = 0_{n,p} \\ &\implies \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \quad \lambda_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

Donc la famille (E^{ij}) est une base. D'où le résultat. $\square$

2.3 Dimension de $E \times F$

Théorème 28.12

Soit E et F deux e.v. de dimension finie. L'e.v. $E \times F$ est alors aussi de dimension finie et

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$$

Et par récurrence immédiate, $\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \sum_{i=1}^p \dim E_i$.

Démonstration. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et si $(f_1, \dots, f_p)$ est une base de F , alors on montre que la famille

$$(e_1, 0) \quad (e_2, 0) \quad \cdots \quad (e_n, 0) \quad (0, f_1) \quad (0, f_2) \quad \cdots \quad (0, f_p)$$

est une base de $E \times F$ (la preuve est simple et laissée en exercice). $\square$

Exemple 14. On retrouve que $\dim \mathbb{K}^n = \dim(\underbrace{\mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{\dim \mathbb{K} + \dots + \dim \mathbb{K}}_{n \text{ fois}} = n \dim \mathbb{K} = n$

2.4 Cardinal d'une famille libre / génératrice et dimension de l'espace

Théorème 28.13 – TTC – Théorème Très Crucial

On suppose que E est de dimension finie égale à n . Alors :

1. Toute famille **libre** possède **au plus** n éléments. De plus, si elle possède **exactement** n éléments, c'est une **base**.
2. Toute famille **génératrice** possède **au moins** n éléments. De plus, si elle possède **exactement** n éléments, c'est une **base**.

Démonstration. Montrons que toute famille libre possède au plus n éléments et que toute famille génératrice possède au moins n éléments.

Sur le même principe et avec le théorème de la base extraite (Théorème 28.6), on montre que toute famille génératrice à n éléments est une base. $\square$

Méthode

Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base d'un e.v. E dont on connaît la dimension n , on peut :

- Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre de cardinal n .
- Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de cardinal n .

Exemple 15. Montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \left((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1) \right)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 16. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \left((X - \alpha)^k \right)_{0 \leq k \leq n}$$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2.5 Complétion ou extraction d'une famille pour obtenir une base

Méthode – Théorème de la base incomplète pour obtenir une base

Soit $\mathcal{L}$ une famille libre d'un e.v. E de dimension n . Pour compléter $\mathcal{L}$ en une base de E :

- On cherche un vecteur $v \in E$ tel que $v \notin \text{Vect}(\mathcal{L})$. Dans ce cas, on rajoute v à $\mathcal{L}$, et la sur-famille obtenue reste **libre**.
- On réitère ce processus jusqu'à obtenir une sur-famille **de cardinal** n , qui sera alors une **base** de E par le TTC (Théorème [28.13](#)).

Pour s'assurer que la famille reste libre, il faut que chaque vecteur ajouté ne soit pas une combinaison linéaire des précédents.

Exemple 17. Dans l'e.v. $\mathbb{R}^3$, la famille à un seul vecteur $\mathcal{F} = ((2, -3, 4))$ est libre. Compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^3$.

Dans l'exemple ci-dessus, nous aurions pu compléter $\mathcal{F}$ de bien des manières. On aurait pu par exemple ajouter $(1, 1, 0)$ en deuxième vecteur, ou encore $(3, 3, 0)$, etc.

Une méthode similaire existe pour l'extraction d'une base à partir d'une famille génératrice. Elle s'appuie sur le résultat suivant, vu au chapitre précédent : si $v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, alors :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n, v) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$$

Méthode – Théorème de la base extraite pour obtenir une base

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice d'un e.v. E de dimension n . Pour extraire de $\mathcal{G}$ une base de E :

- On cherche un vecteur v de $\mathcal{G}$ tel que v est combinaison linéaire des autres vecteurs. Dans ce cas, on enlève v à $\mathcal{G}$, et la sous-famille obtenue reste **génératrice**.
- On réitère ce processus jusqu'à obtenir une sous-famille **de cardinal** n , qui sera alors une **base** de E par le TTC (Théorème 28.13).

3 Dimension et s.e.v.

3.1 Dimension d'un s.e.v.

Théorème 28.14

On suppose E de dimension finie. Alors tout s.e.v. F de E est de dimension finie et

$$\dim F \leq \dim E$$

De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Démonstration.

On note $n = \dim E \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{B}_F$ une base de F . En particulier, $\mathcal{B}_F$ est une famille libre (sur F comme sur E , le caractère libre ne dépend pas de l'e.v. qu'on considère). Comme c'est une famille libre dans E de dimension finie, par le Théorème 28.13,

$$\dim F = \text{card}(\mathcal{B}_F) \leq n = \dim E$$

Ceci montre la première assertion. Supposons maintenant que $\dim F = \dim E = n$. La base $\mathcal{B}_F$ de F possède ainsi n éléments. C'est donc une famille libre de E qui possède autant d'éléments que la dimension de E . C'est en particulier une base de E par le Théorème 28.13. En particulier, $\mathcal{B}_F$ engendre E . Ainsi, $E = \text{Vect}(\mathcal{B}_F) = F$.

□

Méthode

Pour montrer que deux e.v. F et G de dimension finie sont égaux, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité des dimensions :

$$\begin{cases} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{cases} \implies F = G$$

En particulier, cela marche aussi lorsque F et G sont deux s.e.v. (de dimension finie) d'un e.v. E .

Exemple 18. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, les s.e.v. suivants sont égaux :

$$F = \text{Vect}((1, 2, -3), (-3, 2, 1)) \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

Exemple 19. Dans l'exemple précédent, montrer que $\dim G = 2$ sans expliciter de base de G .

3.2 Base adaptée à une décomposition

Définition 28.15 – Base adaptée à une décomposition en s.e.v. supplémentaires

Soit F et G deux s.e.v. supplémentaires de E . On dit qu'une base $\mathcal{B}$ de E est adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ si tout vecteur de $\mathcal{B}$ est un élément de F ou de G .

Exemple 20. On peut vérifier que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ avec

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \quad G = \text{Vect}((1, 1, 1))$$

- La base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$ n'est pas adaptée à cette décomposition car $(1, 0, 0)$ n'est ni dans F , ni dans G .
- Par contre, on peut montrer que la famille $\mathcal{B}$ ci-dessous est une base, et elle est adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$:

Remarque. Dans la définition ci-dessus, tout vecteur de $\mathcal{B}$ est en fait *ou bien* dans F , *ou bien* dans G : si un vecteur u de $\mathcal{B}$ appartenait à F et à G , on aurait $u \in F \cap G$, donc $u = 0_E$ car F et G sont en somme directe. Ainsi, $\mathcal{B}$ contiendrait le vecteur nul 0_E , ce qui n'en ferait pas une base.

Théorème 28.16 – Concaténation de bases de s.e.v. supplémentaires

On suppose que E est de dimension finie n . Soit F et G deux s.e.v. **supplémentaires** de bases respectives $(f_1, \dots, f_p)$ et $(g_1, \dots, g_q)$. La famille

$$\mathcal{B} := (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$$

est une base de E (qui est adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$).

Autrement dit, lorsqu'on dispose de deux s.e.v. supplémentaires dans E , on peut concaténer leurs bases pour former une base de E . Il est essentiel pour cela que les s.e.v. F et G soient supplémentaires.

Exemple 21. Dans l'exemple précédent, toute base de F concaténée à toute base de G aurait donné une base de E adaptée.

Remarque temporaire (À ignorer une fois que le Théorème 28.21 sera vu) Le Théorème 28.16 a une autre conséquence. $\mathcal{B}$ étant une base de E , on a $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim E$. Ainsi,

$$E = F \oplus G \implies \dim E = \text{card}(\mathcal{B}) = p + q \implies \dim E = \dim F + \dim G$$

Théorème 28.17 – Fragmentation d'une base

On suppose que E est de dimension finie n . Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E , qu'on fragmente en deux familles $(e_1, \dots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ avec $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Alors, les s.e.v. suivants sont supplémentaires :

$$V := \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \quad \text{et} \quad V' := \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$$

On a donc $E = V \oplus V'$, et la base $(e_1, \dots, e_n)$ est adaptée à la décomposition $E = V \oplus V'$.

Exemple 22. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on dispose de la base canonique $(E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22})$. Les ensembles

$$\text{Vect}(E^{11}, E^{22}) = \mathcal{D}_2(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \text{Vect}(E^{12}, E^{21}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K} \right\}$$

sont supplémentaires.

Corollaire 28.18 – Existence d'un supplémentaire

Tout s.e.v. de E admet (au moins) un supplémentaire dans E .

Démonstration. La preuve n'est exigible que pour lorsque E est de dimension finie.

□

3.3 Dimension et somme de s.e.v.

Théorème 28.19

On suppose E de dimension finie. Si F et G sont des s.e.v. de E en somme directe, alors $F + G$ est de dimension finie et

Remarque. Ce résultat est faux si la somme n'est pas directe.

Par exemple, si $\dim F > 0$, on a $\dim \underbrace{(F + F)}_{=F} = \dim F \neq \dim F + \dim F$.

Démonstration.

□

Théorème 28.20 – Formule de Grassman

On suppose E de **dimension finie**. Si F et G sont des s.e.v. de E alors $F + G$ est de dimension finie et

Par exemple, si F et G sont deux plans (vectoriels) non confondus de $\mathbb{R}^3$, on peut vérifier que $F + G = \mathbb{R}^3$. La formule de Grassman donne que $\dim(F \cap G) = 2 + 2 - 3 = 1$: ainsi l'intersection de deux plans (vectoriels) non confondus est une droite (vectorielle).

Démonstration.

Comme $F + G \subset E$, l'ensemble $F + G$ est clairement de dimension finie. Les deux premières étapes consistent à construire un ensemble S qui sera en même temps un supplémentaire de F dans $F + G$ et un supplémentaire de $F \cap G$ dans G .

- L'ensemble $F \cap G$ est un s.e.v. de G , donc par le Corollaire 28.18, $F \cap G$ admet un supplémentaire S dans G , i.e.

$$G = (F \cap G) \oplus S \quad \text{donc en particulier} \quad (F \cap G) \cap S = \{0_G\} = \{0_E\}$$

- On considère l'e.v. $\mathcal{E} := F + G$. Montrons que $\mathcal{E} = F \oplus S$.
 - Tout d'abord, montrons que $F \cap S = \{0_E\}$. Comme $S \subset G$, on a $S = G \cap S$ donc

$$F \cap S = F \cap (G \cap S) = (F \cap G) \cap S = \{0_E\}$$

- Ensuite, montrons que $F + S = \mathcal{E}$. Comme $S \subset G$, on a $F + S \subset F + G$ donc $F + S \subset \mathcal{E}$. Réciproquement, montrons que $\mathcal{E} \subset F + S$. Soit donc $x \in \mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E} = F + G$, on peut écrire

$$x = x_F + x_G \quad \text{avec} \quad (x_F, x_G) \in F \times G$$

Or, $x_G \in G = (F \cap G) \oplus S$, donc

$$x_G = x_{F \cap G} + x_S \quad \text{avec} \quad (x_{F \cap G}, x_S) \in (F \cap G) \times S$$

On en déduit que

$$x = \underbrace{x_F + x_{F \cap G}}_{\in F} + \underbrace{x_S}_{\in S} \in F + S$$

D'où $\mathcal{E} \subset F + S$ par arbitraire sur x .

- Finalement, $\mathcal{E} = F \oplus S$.

- Ainsi, par le Théorème 28.19, on a

$$G = (F \cap G) \oplus S \implies \dim G = \dim(F \cap G) + \dim S$$

$$F + G = \mathcal{E} = F \oplus S \implies \dim(F + G) = \dim F + \dim S$$

La première ligne donne $\dim S = \dim G - \dim(F \cap G)$, si bien que la seconde entraîne :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

□

Remarque. La formule de Grassman permet de retrouver le Théorème 28.19. En effet, F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$, c'à d ssi $\dim(F \cap G) = 0$.

3.4 Dimension et s.e.v. supplémentaires

Théorème 28.21 – TTC2 — Caractérisations de “ F et G sont supplémentaires”

On suppose E de **dimension finie**. Soit F et G deux s.e.v. de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $F \oplus G = E$
2. $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$
3. $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$
4. $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$

Autrement dit pour montrer que F et G sont supplémentaires, il suffit de vérifier deux assertions parmi :

- $F + G = E$
- $F \cap G = \{0\}$
- $\dim F + \dim G = \dim E$

et lorsque c'est le cas, la troisième assertion est également vérifiée.

Démonstration.

□

Remarque. Il est souvent difficile de montrer que $E = F + G$. Ainsi, pour montrer que deux s.e.v. sont supplémentaires, on montre fréquemment l'assertion 4 (mais cela ne marche qu'en dimension finie !).

En dimension infinie, on a seulement l'équivalence entre les assertions 1 et 2, comme vu au chapitre précédent.

Exemple 23. Montrer que les ensembles $A = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ sont des s.e.v. supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

4 Compléments : dimension infinie

Théorème 28.22

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est de dimension infinie.
2. Il existe une famille $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ qui est libre.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une famille de n vecteurs de E qui est libre.

Exemple. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie car $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre (et même une base) avec une infinité d'éléments.

Remarque. Toute famille libre infinie n'est pas nécessairement une base. Par exemple, $(X^{2^k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre infinie mais ce n'est pas une base de $\mathbb{K}[X]$.

En particulier, $F = \text{Vect}(X^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ est un s.e.v. de dimension infinie de $E = \mathbb{K}[X]$ mais, bien que tous deux de dimension infinie, on a cependant $F \neq \mathbb{K}[X]$. Le Théorème 28.14 est donc faux lorsque E et F sont de dimension infinie.

5 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une **base** de E , on peut :

- Montrer que $\mathcal{F}$ est libre et $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim E$ (si E est de dimension finie)
- Montrer que $\mathcal{F}$ est génératrice et $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim E$ (si E est de dimension finie)
- Montrer que $\mathcal{F}$ est libre ET génératrice.
- Montrer que tout vecteur $u \in E$ s'écrit de manière unique comme CL des vecteurs de $\mathcal{F}$.
- (cf chapitres suivants !)

Méthode

Pour montrer que **deux s.e.v. F et G sont égaux**, on peut :

- Montrer une inclusion et vérifier que $\dim F = \dim G$ (si F et G sont de dimension finie)
- Réécrire un des s.e.v. différemment pour obtenir l'autre (par exemple passer d'un "Vect" à une forme "équation").
- Raisonner par double inclusion.

Méthode

Pour montrer que **deux s.e.v. F et G sont supplémentaires**, on peut :

- Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ et que $\dim F + \dim G = \dim E$ (si E est de dimension finie)
- Montrer que $F + G = E$ et que $\dim F + \dim G = \dim E$ (si E est de dimension finie)
- Montrer que $F + G = E$ et que $F \cap G = \{0_E\}$
- Montrer que tout vecteur $u \in E$ se décompose de manière unique en $u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$.